جامعة البعث — امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦ / ٢٠١٧

كلية العلوم — المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات

قسم الرياضيات — العلامة: ١٠٠ درجة. المدة: ساعة ونصف. اسم الطالب:

السؤال الأول (٢٠ درجة):

أكتب العبارات التالية بشكل صحيح ودقيق :

(١) قياس لبيغ في $\mathbb{R}$ قد يكون منته أو σ – منته أو غير ذلك.

(٢) قياس العد في $\mathbb{R}$ قد يكون منته أو σ – منته أو غير ذلك.

(٣) كل σ – جبر هو صف دنكين وبالعكس.

(٤) دالة ديريخليه كمولة حسب ريمان وحسب لبيغ والتكاملان متساويان.

(٥) مجموعة كانتور عدودة وقيوسة حسب لبيغ وقياسها 10.

السؤال الثاني (٣٠ درجة):

(أ) عرف كلاً من : الحلقة ، الجبر ، σ – الحلقة ، σ – الجبر.

(ب) أثبت أن صف المجموعات العدودة في $\mathbb{R}$ يشكل حلقة و σ – حلقة لكنه لا يشكل جبر أو σ – جبر.

(جـ) بفرض أن X مجموعة غير خالية، عين σ – الجبر الذي تولده الصفوف التالية:

$$\mathcal{H}_1=\{X\} \quad , \quad \mathcal{H}_2=\{\phi\} \quad , \quad \mathcal{H}_3=\{\phi\,,X\}.$$

السؤال الثالث (٢٧ درجة):

(أ) عرف كلاً من : الخاصة تقريباً في كل مكان ، الدالة القيوسة.

(ب) لتكن الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بالشكل:

$$f(x)=e^x \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x & ; \ x\in\mathbb{N} \\ e^x & ; \ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}. \end{cases}$$

(جـ) أي منها مستمرة أو مستمرة تقريباً في كل مكان.

(د) هل هما متساويتان تقريباً في كل مكان على $\mathbb{R}$! هل هما قيوستان ؟

السؤال الرابع (٢٣ درجة):

لتكن الدالتين المعرفتين على المجموعة $E=[0,1]$ بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ; \ x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & ; \ x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}. \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x=0 \\ 1+x^2 & ; \ 1<x<1 \\ 1 & ; \ x=1. \end{cases}$$

أثبت أن هذه الدوال كمولة حسب لبيغ على المجموعة المذكورة ثم احسب التكاملات التالية :

$$\int_{[0,1]} f(x)\,d\lambda \quad , \quad \int_{[0,1]} g(x)\,d\lambda \quad , \quad \int_{[0,1]} [\,f(x)+g(x)\,]\,d\lambda.$$

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح — مدرس المادة : د. إبراهيم إبراهيم

حمص في ١٨ / ١ / ٢٠١٧ .

(١)

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس
السنة الثالثة - رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦ / ٢٠١٧

السؤال الأول (٢٠ درجة):

١) قياس ليبيغ في $\mathbb{R}$ ليس منته ولكنه σ - منته
٢) قياس العد في $\mathbb{R}$ ليس منته وليس σ - منته.
٣) كل σ - جبر هو صف دنكين، لكن العكس غير صحيح.
يكون صف دنكين σ - جبر إذا كان مغلقاً بالنسبة للتقاطع المنته.
٤) دالة ديريخليه مكمولة حسب ليبيغ وغير مكمولة حسب ريمان.
٥) مجموعة كانتور غير عدودة لكنها مقيسة حسب ليبيغ وقياسها 0.

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

(أ) الحلقة: الصف $\mathcal{R}$ يشكل حلقة على X إذا تحقق:

$A\cup B\in\mathcal{R}$, $A\setminus B\in\mathcal{R}$; $\forall A,B\in\mathcal{R}$.

الجبر: هو حلقة فيها $X\in\mathcal{R}$.

σ - الحلقة: الصف $\mathcal{R}$ يشكل σ - حلقة على X إذا تحقق:

1) $A\setminus B\in\mathcal{R}$; $\forall A,B\in\mathcal{R}$.

2) $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{R}$; $\forall A_i\in\mathcal{R}$.

σ - الجبر: هو σ - حلقة $\mathcal{R}$ فيها $X\in\mathcal{R}$ (يوجد تعريف آخر).

(ب) لتكن الصف $\mathcal{H}=\{A\subset\mathbb{R} : A$ مجموعة عدودة$\}$.

حلقة: لتكن $A,B\in\mathcal{H}$ ، هذا يعني أن A,B مجموعتين عدودتين، لذلك يكون كل من $A\cup B$ و $A\setminus B$ عدودة $\Leftarrow$ $A\cup B\in\mathcal{H}$ و $A\setminus B\in\mathcal{H}$.

σ - حلقة: حسب ما تقدم فإن $A\setminus B\in\mathcal{H}$ من أجل $A,B\in\mathcal{H}$.
لتكن $A_1,A_2,\dots\in\mathcal{H}$ ، هذا يعني أن كل A_i مجموعة عدودة وبالتالي اجتماعها $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ مجموعة عدودة $\Leftarrow$ $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{H}$.

جبر: بما أن $\mathbb{R}$ مجموعة غير عدودة فإن $\mathbb{R}\notin\mathcal{H}$ $\Leftarrow$ ليس جبر

σ - جبر: " " " " " " " " $\Leftarrow$ $\mathcal{H}$ ليس σ - جبر.

٥- الجبر المولد بالصفوف هو:

$$\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}_1) = \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}_2) = \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}_3) = \{\phi, X\}.$$

السؤال الثالث (٢٧ درجة):

التعاريف:

نقول عن خاصة P إنها محققة تقريباً في كل مكان من المجموعة E إذا تحقق مايلي:

توجد مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ قيوسة وقياسها 0.

الخاصة P محققة على $E \setminus E_0$ وغير محققة على E_0.

نقول عن الدالة $f: E \to \bar{\mathbb{R}}$ إنها قيوسة على E إذا كانت المجموعة $E(f>c)$ قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c.

(يمكن ذكر المجموعات: $E(f\geq c)$ ، $E(f<c)$ ، $E(f\leq c)$).

ب) الدالة $f(x) = e^{x}$ مستمرة في كل مكان من $\mathbb{R}$.

الدالة $g(x)$ مستمرة تقريباً في كل من $\mathbb{R}$ لأنها غير مستمرة على $\mathbb{N}$ كما أن $\lambda(\mathbb{N}) = 0$.

ج) لدينا:

$E_0 = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\} = \mathbb{N},$

$\lambda(E_0) = \lambda(\mathbb{N}) = 0,$

$f(x) = g(x) \neq e^{x} \; ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$

لذلك $f \overset{a.e}{=} g$.

د) الدالة $f(x)$ قيوسة لأنها مستمرة.

الدالة $g(x)$ قيوسة لأنه:

طريقة ١: لأن $f \overset{a.e}{=} g$

طريقة ٢: $g(x)$ مستمرة على $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ فهي قيوسة على هذه المجموعة.
وبما أن $\lambda(\mathbb{N}) = 0$ فإن $g(x)$ قيوسة على $\mathbb{N}$
وبالتالي فإن $g(x)$ قيوسة على
$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}.$

ال الرابع (٢ درجة):

الة $f(x)$ هي دالة دير بخليه وهي كمولة حسب ليبيغ لأنها قيوسة ومحدودة.
تكاملها:

$$\int_{[0,1]} f(x)\,d\lambda = \underbrace{\int_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} f(x)\,d\lambda}_{=0} + \underbrace{\int_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} f(x)\,d\lambda}_{=0} = 0+0=0.$$

لأن $\lambda([0,1]\cap\mathbb{Q})=0$ ، لأن $f(x)=0$

الدالة $g(x)$ كمولة حسب ليبيغ لأن:

طريقة ١: كمولة حسب ريمان على $[0,1]$ لأنها مستمرة باستثناء النقطتين $\{0,1\}$ و $\lambda(\{0,1\})=0$.

طريقة ٢: $g(x)$ مستمرة تقريباً في كل مكان على $[0,1]$ فهي قيوسة وهي محدودة لأن:

$$|g(x)| \le 2 \;;\; \forall x\in[0,1]$$

تكاملها:

$$\int_{[0,1]} g(x)\,d\lambda = (R)\int_0^1 (1+x^2)\,dx = x+\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{4}{3}$$

يكون أيضاً:

$$\int_{[0,1]} [f(x)+g(x)]\,d\lambda = \int_{[0,1]} f(x)\,d\lambda + \int_{[0,1]} g(x)\,d\lambda = 0+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$$

مدرس المادة:
د. ابراهيم ابراهيم